Том 27, № 139 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-247-260
УДК 515.126.4+515.124.2

Об устойчивости и непрерывной зависимости от параметра множества точек совпадения двух отображений, действующих в пространство с расстоянием

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ[1] **, Вассим МЕРЧЕЛА**[2]
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассматривается задача о точках совпадения двух отображений $\psi, \varphi,$ действующих из метрического пространства (X,ρ) в пространство $(Y,d),$ в котором расстояние d обладает лишь одним из свойств метрики: $d(y_1,y_2)=0 \;\Leftrightarrow\; y_1=y_2,$ и не предполагается ни симметричным, ни удовлетворяющим неравенству треугольника. Исследуется вопрос о корректности уравнения

$$\psi(x)=\varphi(x),$$

определяющего точку совпадения. Показано, что если $x=\xi$ — решение этого уравнения, то для любой последовательности α_i-накрывающих отображений $\psi_i: X\to Y$ и любой последовательности β_i-липшицевых отображений $\varphi_i: X\to Y,$ $\alpha_i>\beta_i\geq 0,$ в случае сходимости $d(\varphi_i(\xi),\psi_i(\xi))\to 0$ уравнение $\psi_i(x)=\varphi_i(x)$ при любом i обладает решением $x=\xi_i$ таким, что $\rho(\xi_i,\xi)\to 0.$

Далее в статье исследуется зависимость от параметра t — элемента топологического пространства T множества $\mathrm{Coin}(t)$ точек совпадения отображений $\psi(\cdot,t),\varphi(\cdot,t): X\to Y.$ В предположении, что первое из этих отображений является α-накрывающим, второе — β-липшицевым, получено утверждение о полунепрерывности сверху, полунепрерывности снизу и непрерывности многозначного отображения $\mathrm{Coin}: T\rightrightarrows X.$

Ключевые слова: корректность уравнения, непрерывная зависимость от параметра, точка совпадения двух отображений, расстояние, накрывающее отображение

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00772, https://rscf.ru/project/22-21-00772/).

Для цитирования: *Жуковская Т.В., Мерчела В.* Об устойчивости и непрерывной зависимости от параметра множества точек совпадения двух отображений, действующих в пространство с расстоянием // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 247–260. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-247-260.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-247-260

On stability and continuous dependence on parameter of the set of coincidence points of two mappings acting in a space with a distance

Tatiana V. ZHUKOVSKAIA[1] **, Wassim MERCHELA**[2]
[1] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. We consider the problem of coincidence points of two mappings ψ, φ acting from a metric space (X,ρ) into a space (Y,d) in which a distance d has only one of the properties of the metric: $d(y_1,y_2)=0 \;\Leftrightarrow\; y_1=y_2,$ and is assumed to be neither symmetric nor satisfying the triangle inequality. The question of well-posedness of the equation

$$\psi(x)=\varphi(x)$$

which determines the coincidence point, is investigated. It is shown that if $x=\xi$ is a solution to this equation, then for any sequence of α_i-covering mappings $\psi_i : X \to Y$ and any sequence of β_i-Lipschitz mappings $\varphi_i : X \to Y,$ $\alpha_i > \beta_i \geq 0,$ in the case of convergence $d(\varphi_i(\xi),\psi_i(\xi)) \to 0$, equation $\psi_i(x)=\varphi_i(x)$ has, for any $i,$ a solution $x=\xi_i$ such that $\rho(\xi_i,\xi)\to 0.$

Further in the article, the dependence of the set $\mathrm{Coin}(t)$ of coincidence points of mappings $\psi(\cdot,t),\varphi(\cdot,t) : X \to Y$ on a parameter $t,$ an element of the topological space $T,$ is investigated. Assuming that the first of these mappings is α-covering and the second one is β-Lipschitz, we obtain an assertion on upper semicontinuity, lower semicontinuity, and continuity of the set-valued mapping $\mathrm{Coin} : T \rightrightarrows X.$

Keywords: well-posedness of equation, continuous dependence on parameter, coincidence point of two mappings, distance, covering mapping

Acknowledgements: The work was supported by Russian Science Foundation (project no. 22-21-00772, https://rscf.ru/project/22-21-00772/).

Mathematics Subject Classification: 54H25, 47H14.

For citation: Zhukovskaia T.V., Merchela W. Ob ustoychivosti i nepreryvnoy zavisimosti ot parametra mnozhestva tochek sovpadeniya dvukh otobrazheniy, deystvuyushchikh v prostranstvo s rasstoyaniyem [On stability and continuous dependence on parameter of the set of coincidence points of two mappings acting in a space with a distance]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 247–260. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-247-260. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Одним из важнейших требований к математическому описанию различных процессов является корректность модельных уравнений. Поскольку параметры таких процессов могут быть найдены лишь с некоторой точностью (например, в результате измерений или приближенных расчетов), то необходимо, чтобы погрешность определения параметров не приводила к большим отклонениям решений модельных уравнений. Понятие корректности введено Ж. Адамаром для краевых задач математической физики в 1923 г. За прошедший век проблеме корректности различных интегральных, дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений, а также общих операторных уравнений в различных классах пространств были посвящены многие работы (см., например, обзор Г. М. Вайникко [1]). Общие подходы к получению условий корректности операторных уравнений, по-видимому, впервые были предложены в работе Ц. Артштейна [2]. Корректность наиболее важного для приложений класса операторных уравнений Вольтерры исследована Е. С. Жуковским в [3].

Корректность уравнения по Адамару означает, что уравнение разрешимо, решение единственно и мало изменяется при малых изменениях уравнений. Однако, такое определение не пригодно для описания процессов, развитие которых может происходить различно при одних и тех же условиях. Для моделирования таких процессов используют стохастические уравнения либо обычные детерминированные уравнения (а также неравенства, включения и др.), имеющие более одного решения. Для подобных уравнений естественным является вопрос о малом изменении множества решений при малых изменениях уравнений. Этот вопрос обычно формализуется «секвенциально» или «топологически». Первый тип формализации означает, что для любой последовательности уравнений (или отображений, их порождающих), сходящейся (согласно некоторому «разумному» определению) к исходному уравнению, множество их решений сходится (также согласно некоторому «разумному» определению) к множеству решений исходного уравнения. При второй формализации вопроса о корректности рассматривают уравнение с параметром t — элементом топологического пространства T, которое совпадает с исходным уравнением при некотором значении параметра t_0. Уравнение считается корректным, если его множество решений, как многозначное отображение параметра t, является непрерывным (или полунепрерывным) в точке t_0. Вопрос о корректности в такой постановке тесно связан с классической задачей о неявной функции (см. [4, 5]).

В настоящей работе рассматриваются обе формализации вопроса о корректности уравнения, определяющего точку совпадения двух заданных отображений. Для многозначных отображений (а следовательно, и для «обычных однозначных» отображений), действующих из метрического пространства в метрическое, условия корректности задачи о точках совпадения в секвенциальной постановке получены в [6, 7]. Мы исследуем корректность задачи о точках совпадения отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расширенным расстоянием, которое удовлетворяет лишь одной метрической аксиоме тождества, но не обязано быть симметричным и для него может не выполняться неравенство треугольника. Рассмотрение отображений в таких пространствах мотивировано исследованиями краевых задач и задач управления для сингулярных дифференциальных уравнений, для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, и для некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений (подробнее см. [8, 9]).

Статья разделена на три секции. В секции 1. приводятся необходимые сведения о пространствах с расширенным расстоянием, даются определения свойств замкнутости, липшицевости и накрывания отображений, действующих из метрического пространства X в пространство Y с расширенным расстоянием. В секции 2. решается вопрос о корректности в секвенциальной постановке уравнения, определяющего точку совпадения накрывающего и липшицева отображений $X \to Y$. Заключительная секция 3. посвящена исследованию зависимости множества точек совпадения от параметра.

1. Основные понятия

Будем обозначать $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$.

Пусть $X \neq \emptyset$, (X, ρ) — метрическое пространство с метрикой $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим через $B_X(x_0, r)$ замкнутый шар в этом метрическом пространстве с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, т. е. $B_X(x_0, r) = \big\{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\big\}$ при $r \in \mathbb{R}_+$ и $B_X(x_0, +\infty) = X$.

Пусть также задано множество $Y \neq \emptyset$. *Расширенным расстоянием* (*расстоянием*) в Y называют отображение $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \ \Leftrightarrow \ y_1 = y_2.$$

В отличие от метрики ρ расстояние d может быть несимметричным и не обязано удовлетворять неравенству треугольника. Отметим, что расстояния, не являющиеся симметричными, используются, например, в различных транспортных задачах (учитывающих разную протяженность дорог, разную стоимость перевозок из x в y и из y в x). Расстояния, не удовлетворяющие «обычному» неравенству треугольника, используются в информатике, например, при моделировании времени задержки сигнала при его возвращении в исходную точку Интернета (см. [10]). Часто используются расстояния, удовлетворяющие ослабленному неравенству треугольника. А именно, рассматривается функция $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$, непрерывная в точке $(0, 0)$ и такая, что $f(0, 0) = 0$. Говорят, что расстояние $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ удовлетворяет f*-неравенству треугольника*, если выполнено соотношение

$$\exists \sigma > 0 \ \ \forall x, y, z \in Y \ \ \big(d(x, y) < \sigma, \ d(y, z) < \sigma\big) \ \Rightarrow \\ d(x, z) \leq f\big(d(x, y), d(y, z)\big). \tag{1.1}$$

При выполнении соотношения (1.1) расстояние d называют f*-квазиметрикой*, а пару (Y, d) — f*-квазиметрическим пространством.* Такие пространства и действующие в них отображения исследовались в [11–15].

Для элемента $y_0 \in Y$ и числа $\delta > 0$ определим в пространстве (Y, d) шар $B_Y(y_0, \delta) = \big\{y \in Y : d(y_0, y) \leq \delta\big\}$. Отметим, что в отличие шара в метрическом пространстве это множество не обязательно является замкнутым в «естественной топологии» (см. [11, 13, 14]) пространства с расстоянием, даже при выполнении обобщенного неравенства треугольника (1.1).

На отображения, действующие в пространство (Y, d) с расстоянием d общего вида, естественным образом распространяются многие понятия анализа отображений метрических пространств (см. [8, 16, 17]), формулирующиеся через сходимость последовательностей.

Говорят, что последовательность $\{y_i\} \subset Y$ *сходится* к элементу $y \in Y$, и пишут $y_i \to y$, если $d(y, y_i) \to 0$. Отметим, что при такой сходимости последовательность расстояний $\{d(y_i, y)\}$ может не сходиться к нулю, а предел y может быть не единственным. Для произвольной последовательности $\{y_i\} \subset Y$ обозначим через $\operatorname{Lim} y_i = \{y | \, y_i \to y\}$ множество всех ее пределов.

Отображение $g : X \to Y$ называют *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $\rho(x, x_i) \to 0$, выполнено $d\big(g(x), g(x_i)\big) \to 0$. Отображение $g : X \to Y$ называют *замкнутым в точке* $x \in X$, если из сходимости к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ и существования $y \in Y$ такого, что $d\big(y, g(x_i)\big) \to 0$ следует равенство $g(x) = y$. Отображение, непрерывное (замкнутое) во всех точках множества $V \subset X$, называют *непрерывным* (*замкнутым*) *на множестве* V, а в случае $V = X$ такое отображение называют *непрерывным* (*замкнутым*). Отметим, что если расстояние в Y не является метрикой, замкнутость отображения не следует из его непрерывности. Кроме того, если для последовательности $x_i \to x$ во множестве $\operatorname{Lim} g(x_i)$ содержится более одного элемента, отображение $g : X \to Y$, очевидно, не может быть замкнутым в точке x (при этом отображение $g : X \to Y$ может быть непрерывным в этой точке). Приведем соответствующий пример.

Пример 1.1. Пусть $X = \mathbb{R}$ — вещественная прямая с «обычной» метрикой $\rho(x, u) = |x - u|$, $x, u \in X$, а $Y = \mathbb{R} \cup \{\vartheta\}$ — прямая Зоргенфрея (определение см., например, [18]), дополненная одной точкой ϑ. Порядок на прямой $\mathbb{R} \subset Y$ дополним неравенствами $y < \vartheta < z$, которые будем считать выполненными для любых чисел $y < 0 < z$ (элементы ϑ и 0 полагаем несравнимыми). Расстояние в Y зададим соотношениями

$$\forall y, z \in Y \quad d(y, z) = \begin{cases} z - y, & \text{если } z \geq y, \\ 1, & \text{если } z < y, \end{cases} \qquad d(\vartheta, 0) = d(0, \vartheta) = 1.$$

Такое расстояние удовлетворяет «обычному» неравенству треугольника, но не является симметричным. Рассмотрим последовательность $\{i^{-1}\} \subset Y$. Множеством ее пределов, очевидно, является двухточечное множество $\operatorname{Lim} i^{-1} = \{0, \vartheta\}$.

Определим $g : X \to Y$ как отображение вложения, т. е. $g(x) = x$ при любом $x \in X$. Это отображение непрерывно, однако не является замкнутым в точке $x = 0$. Действительно, для числовой последовательности $\{i^{-1}\} \subset X$ имеем $i^{-1} \to 0$, и как отмечено выше, последовательность тех же чисел в пространстве Y сходится к двум пределам: 0 и ϑ. Следовательно, $g(x_i) \to \vartheta$, но $g(x) = 0 \neq \vartheta$.

Сформулируем определение свойства «ослабленной» замкнутости, которым обладают все непрерывные отображения из X в Y.

Определение 1.1. Отображение $g : X \to Y$ называем *d-замкнутым в точке* $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \to x$ и $\operatorname{Lim} g(x_i) \neq \emptyset$, выполнено включение $g(x) \in \operatorname{Lim} g(x_i)$. Отображение, d-замкнутое во всех точках множества $V \subset X$, называем *d-замкнутым на множестве* V, а при $V = X$ такое отображение называем *d-замкнутым.*

Приведем предложенные в [16] определения свойств накрывания и липшицевости отображений, действующих из X в Y. Эти формулировки распространяют известные определения (см. [19,20]) соответствующих свойств отображений, действующих в метрических пространствах.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть $\beta \geq 0$. Отображение $g : X \to Y$ называется β*-липшицевым*, если выполнено соотношение

$$\forall x, u \in X \ \ d\big(g(x), g(u)\big) \leq \beta \rho(x, u).$$

Если отображение β-липшицево, то оно, очевидно, непрерывно и, следовательно, d-замкнуто, но при этом может не быть замкнутым.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $g : X \to Y$ называется α*-накрывающим*, если выполнено соотношение

$$\forall x_0 \in X \ \ \forall y \in Y \ \ \exists x \in X \ \ g(x) = y \ \text{ и } \ \rho(x, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} d\big(g(x), g(x_0)\big).$$

Отметим, что накрывающее отображение сюръективно.

В работе [16] установлено существование точки совпадения α-накрывающего и β-липшицева отображений при $\alpha > \beta$. Это утверждение распространяет теорему Арутюнова о точках совпадения, на отображения, действующие из метрического пространства в пространство с расстоянием. Мы приведем полученное в [17] аналогичное утверждение для отображений, удовлетворяющих несколько менее обременительным предположениям, чем накрывание и липшицевость. С использованием этого утверждения мы получим теоремы об устойчивости множества точек совпадения двух отображений и исследуем множество точек совпадения, если отображения зависят от параметров.

2. Устойчивость множества точек совпадения

Сформулируем предложенные в работе [21] обобщения определений 1.2 и 1.3.

Пусть задано множество $U \subset X$. Для отображения $g : X \to Y$ определим следующие два множества:

$$\mathrm{Cov}_\alpha[g; U] := \Big\{(x, y) \in X \times Y : \ d(y, g(x)) < +\infty \ \Rightarrow \ \exists u \in U \ g(u) = y, \ \rho(u, x) \leq \frac{1}{\alpha} d(y, g(x))\Big\};$$
$$\mathrm{Lip}_\beta[g; U] := \Big\{(x, y) \in X \times Y : \ \forall u \in U \ g(u) = y \ \Rightarrow \ d(y, g(x)) \leq \beta \rho(u, x)\Big\};$$

первое из которых назовем *множеством* α*-накрывания отображения* g *относительно множества* U, а второе — *множеством* β*-липшицевости отображения* g *относительно* U. Очевидно, соотношение $\mathrm{Cov}_\alpha[g; X] = X \times Y$ означает, что отображение g является α-накрывающим, а соотношение $\mathrm{Lip}_\beta[g; X] = X \times Y$, что отображение g является β-липшицевым. Отметим, что множества накрывания и липшицевости отображения g монотонно по вложению зависят от множества $U \subset X$, а именно имеют место соотношения:

$$U \subset \overline{U} \subset X \ \Rightarrow \ \mathrm{Cov}_\alpha[g; U] \subset \mathrm{Cov}_\alpha[g; \overline{U}], \ \ \mathrm{Lip}_\beta[g; U] \supset \mathrm{Lip}_\beta[g; \overline{U}].$$

Приведем пример действительной функции, не обладающей свойствами накрывания, когда на множестве ее значений задана обычная евклидова метрика, и покажем, что введением на этом множестве другого расширенного расстояния можно добиться того, что функция станет накрывающей.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим функцию $g : [-1, 1] \to [-1, 0]$, $g(x) = -x^2$. Эта функция сюръективна. При стандартном определении евклидовой метрики на множествах

$X = [-1,1]$ и $Y = [-1,0]$ отображение $g : X \to Y$ не является α-накрывающим ни при каком значении $\alpha > 0$. Более того, при любом $x \in X$ пара $(x,0)$ не принадлежит множеству $\mathrm{Cov}_\alpha[g;X]$ α-накрывания этого отображения относительно всего X. Но если на множестве Y задать расстояние как на прямой Зоргенфрея, т. е.

$$\forall y,z \in Y \quad d(y,z) = \begin{cases} z-y, & \text{если } z \geq y, \\ 1, & \text{если } z < y, \end{cases}$$

то для $\alpha = 1$ будет выполнено вложение $X \times \{0\} \subset \mathrm{Cov}_\alpha[g;X]$.

В терминах множеств накрывания и липшицевости сформулируем без доказательства следующее утверждение о существовании точки совпадения отображений $\psi,\varphi : X \to Y$, полученное в работе [17]. Напомним, что точкой совпадения этих отображений называют элемент $x \in X$, удовлетворяющий уравнению

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

Теорема 2.1. *Пусть метрическое пространство X полное, заданы вещественные числа $\alpha > \beta \geq 0$, и элемент $x_0 \in X$ такие, что $d\big(\varphi(x_0),\psi(x_0)\big) < +\infty$. Положим*

$$R = (\alpha-\beta)^{-1} d\big(\varphi(x_0),\psi(x_0)\big), \quad U = B_X(x_0,R).$$

Предположим, что для любого $x \in U$ выполнены включения

$$(x,\psi(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\varphi;U], \quad (x,\varphi(x)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[\psi;X];$$

на шаре U отображение ψ является замкнутым, а отображение φ — непрерывным. Тогда в шаре U существует точка совпадения отображений ψ,φ.

З а м е ч а н и е 2.1. Как было продемонстрировано в примере 1.1, условие замкнутости отображения $\psi : X \to Y$ является обременительным и не выполняется в точках $x \in X$, для которых найдется последовательность $x_i \to x$ такая, что предел последовательности $\{\psi(x_i)\} \subset Y$ не единственный. Вместо условия замкнутости отображения $\psi : X \to Y$ в теореме 2.1 можно потребовать, чтобы это отображение было d-замкнутым, и выполнялось соотношение

$$\forall \{x_i\} \subset U \ \ \forall x \in U \ \ \big(x_i \to x \ \text{ и } \ \varphi(x) \in \mathrm{Lim}\,\psi(x_i) \big) \ \Rightarrow \ \varphi(x) = \psi(x).$$

Используем теорему 2.1 для исследования задачи об устойчивости множества точек совпадения отображений $\psi,\varphi : X \to Y$ к малым изменениям данных отображений.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы отображения $\psi_n,\varphi_n : X \to Y$, и пусть имеется некоторая сходимость $\psi_n \to \psi$ и $\varphi_n \to \varphi$. Получим условия, обеспечивающие существование для любых $n \in \mathbb{N}$ точек совпадения отображений ψ_n,φ_n и их сходимость при $n \to +\infty$ (в метрическом пространстве X) к точке совпадения отображений ψ,φ.

Теорема 2.2. *Предположим, что отображения $\psi,\varphi : X \to Y$ имеют точку совпадения $x = \xi$. Пусть метрическое пространство X является полным, и пусть заданы вещественные числа $\alpha_n > \beta_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Определим шар*

$$U_n = B_X(\xi,r_n), \ \ \textit{где} \ \ r_n = \frac{1}{\alpha_n-\beta_n} d\big(\varphi_n(\xi),\psi_n(\xi)\big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Будем предполагать, что для каждого n *при всех* $x \in U_n$ *выполнены включения*

$$(x, \psi_n(x)) \in \mathrm{Lip}_{\beta_n}\big[\varphi_n; U_n\big], \quad (x, \varphi_n(x)) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_n}\big[\psi_n; X\big],$$

отображение ψ_n *является замкнутым на шаре* U_n, *отображение* φ_n *— непрерывным на шаре* U_n, *и числовая последовательность* $\{r_n\}$ *сходится к* 0. *Тогда при любом* n *существует точка совпадения* ξ_n *отображений* ψ_n, φ_n *такая, что при* $n \to +\infty$ *имеет место сходимость* $\xi_n \to \xi$ *в пространстве* X.

Доказательство. При любом n для отображений ψ_n, φ_n выполнены условия теоремы 2.1, если положить $x_0 = \xi$. Согласно этой теореме при любом n существует точка совпадения ξ_n этих отображений такая, что $\rho(\xi, \xi_n) \le r_n$. А поскольку $r_n \to 0$, из этого неравенства, очевидно, следует сходимость $\xi_n \to \xi$ при $n \to +\infty$. □

К теореме 2.2 можно сделать следующее замечание, аналогичное замечанию 2.1.

Замечание 2.2. В теореме 2.2 предположение замкнутости на шаре U_n отображения $\psi_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, может быть ослаблено и заменено предположением его d-замкнутости на U_n в совокупности с соотношением

$$\forall \{x_i\} \subset U_n \ \forall x \in U_n \ \ \big(x_i \to x \ \text{ и } \ \varphi_n(x) \in \mathrm{Lim}\, \psi_n(x_i) \big) \ \Rightarrow \ \varphi_n(x) = \psi_n(x).$$

Из теоремы 2.2 получим утверждение об устойчивости множества решений уравнения

$$\psi(x) = y_0 \tag{2.1}$$

к малым изменениям правой части $y_0 \in Y$.

Следствие 2.1. *Предположим, что уравнение* (2.1) *разрешимо и* $x = \xi$ *— его решение. Пусть метрическое пространство* X *является полным, и пусть существуют такие положительные* α, r, δ, *что при всех* $x \in B_X(\xi, r)$ *и* $y \in B_Y(y_0, \delta)$ *выполнено включение* $(x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\psi; X\big]$ *и, кроме того, отображение* ψ *является замкнутым на шаре* $B_X(\xi, r)$. *Тогда для любой последовательности* $\{y_n\} \subset Y$ *такой, что* $d(y_n, y_0) \to 0$, *при любом* n, *начиная с некоторого номера, существует решение* $x = \xi_n$ *уравнения*

$$\psi(x) = y_n,$$

и при $n \to +\infty$ *имеет место сходимость* $\xi_n \to \xi$ *в пространстве* X.

Доказательство. Определим для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение $\psi_n = \psi$ и постоянное отображение $\varphi_n \equiv y_n$. Положим $r_n = \alpha^{-1} d(y_n, y_0)$. Очевидно, отображение $\varphi_n : X \to Y$ является 0-липшицевым, и поэтому $\mathrm{Lip}_{\beta_n}\big[\varphi_n; U_n\big] = X \times Y$, где $\beta_n = 0$, а $U_n = B_X(\xi, r_n)$. Вследствие сходимости $r_n \to 0$ существует такое натуральное N, что при всех $n > N$ справедливо неравенство $r_n < r$. Это означает, что шар U_n вложен в шар $B_X(\xi, r)$. Таким образом, для всех $n > N$ выполнены все условия теоремы 2.2, из которой следует доказываемое утверждение. □

3. Непрерывная зависимость от параметра множества точек совпадения

Приведем определения некоторых понятий многозначного анализа, которые будут использоваться в исследовании зависимости от параметров точек совпадения (подробнее об этих понятиях см. [22, § 2.3], [23, § 1.2]).

Для произвольного подмножества M метрического пространства (X, ρ) и любого числа $r > 0$ обозначим $O(M, r) := \{x \in X : \exists x_0 \in M \ \rho(x, x_0) < r\}$.

Рассмотрим топологическое пространство T. Зафиксируем $t_0 \in T$ и обозначим через $\mathcal{T}(t_0)$ совокупность окрестностей этой точки (совокупность всех открытых множеств, содержащих t_0). Пусть задано многозначное отображение $\Phi : T \rightrightarrows X$ такое, что множество $\Phi(t) \subset X$ не пусто и замкнуто при любом $t \in T$. Напомним, что многозначное отображение Φ называют *полунепрерывным снизу в точке* t_0, если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $\Phi(t_0) \cap V \neq \emptyset$, существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, все точки которого $t \in W(t_0)$ удовлетворяют соотношению $\Phi(t) \cap V \neq \emptyset$. Для полунепрерывности снизу в точке t_0 многозначного отображения Φ необходимо и достаточно, чтобы для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in \Phi(t_0)$ существовала окрестность точки t_0 такая, что при всех t из этой окрестности во множестве $\Phi(t)$ найдется элемент x, удовлетворяющий неравенству $\rho(x, x_0) < \varepsilon$. Многозначное отображение Φ называют *полунепрерывным сверху в точке* t_0, если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $\Phi(t_0) \subset V$, существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, для которого $\Phi\big(W(t_0)\big) \subset V$. Если отображение Φ полунепрерывно сверху и снизу в точке t_0, то говорят, что оно *непрерывно в точке* t_0. Многозначное отображение называется *полунепрерывным снизу* (*полунепрерывным сверху*, *непрерывным*), если оно полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) в каждой точке $t_0 \in T$.

Будем также использовать близкие определенным выше свойствам полунепрерывности и непрерывности многозначного отображения $\Phi : T \rightrightarrows X$ свойства его h-полунепрерывности и h-непрерывности. Отображение Φ называют *h-полунепрерывным снизу* (*h-полунепрерывным сверху*) *в точке* $t_0 \in T$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, все точки которого $t \in W(t_0)$ удовлетворяют соотношению $\Phi(t_0) \subset O\big(\Phi(t), \varepsilon\big)$ (соотношению $\Phi(t) \subset O\big(\Phi(t_0), \varepsilon\big)$, соответственно). Отметим, что из h-полунепрерывности снизу многозначного отображения Φ следует его полунепрерывность снизу, из полунепрерывности сверху многозначного отображения Φ следует его h-полунепрерывность сверху (см. [23, п. 1.2.3]). Многозначное отображение, h-полунепрерывное сверху и снизу в точке t_0, называется *h-непрерывным в этой точке*. Многозначное отображение, h-полунепрерывное снизу (h-полунепрерывное сверху, h-непрерывное) в любой точке $t_0 \in T$, называется *h-полунепрерывным снизу* (*h-полунепрерывным сверху*, *h-непрерывным*).

Теперь рассмотрим задачу о непрерывной зависимости от параметра $t \in T$ множества точек совпадения отображений $\psi(\cdot, t) : X \to Y$ и $\varphi(\cdot, t) : X \to Y$. Обозначим через $\mathrm{Coin}(t)$ множество точек совпадения отображений $\psi(\cdot, t)$ и $\varphi(\cdot, t)$, т. е. множество решений уравнения

$$\psi(x, t) = \varphi(x, t). \tag{3.1}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$d\big(\varphi(x, t), \psi(x, t)\big) = 0.$$

Для его исследования определим функционал

$$\eta_x : T \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \eta_x(t) = d\big(\varphi(x,t), \psi(x,t)\big). \tag{3.2}$$

Пусть задана точка $t_0 \in T$. В предлагаемом ниже утверждении о свойствах многозначного отображения $\mathrm{Coin} : T \rightrightarrows X$ будут использоваться следующие условия:

(C_-) для любого $x \in X$ такого, что $\eta_x(t_0) = 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, все точки которого $t \in W(t_0)$ удовлетворяют неравенству $\eta_x(t) < \varepsilon$;

($\widehat{\mathrm{C}}_-$) для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего равенству $\eta_x(t_0) = 0$, при всех $t \in W(t_0)$ справедливо неравенство $\eta_x(t) < \varepsilon$;

($\widehat{\mathrm{C}}_+$) для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$ такое, что если для некоторых $x \in X$, $t \in W(t_0)$ достигается равенство $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon$.

Очевидно, условие (C_-) выполнено тогда и только тогда, когда при x таком, что $\eta_x(t_0) = 0$, функционал η_x непрерывен в точке t_0, Для непрерывности η_x в t_0 достаточно, чтобы в этой точке непрерывными были оба отображения $\psi(x,\cdot)$ и $\varphi(x,\cdot)$, а расстояние d было бы симметричным и удовлетворяло бы f-неравенству треугольника (1.1). Для выполнения условий ($\widehat{\mathrm{C}}_-$) и ($\widehat{\mathrm{C}}_+$) достаточно равностепенной непрерывности в точке t_0 семейства функционалов $\eta_X := \big\{\eta_x : T \to \overline{\mathbb{R}}_+,\ x \in X\big\}$. А семейство η_X равностепенно непрерывно в t_0, если равностепенно непрерывным в этой точке будет совокупность отображений $\big\{\psi(x,\cdot), \varphi(x,\cdot) : T \to Y,\ x \in X\big\}$ и расстояние d будет симметричным и будет удовлетворять f-неравенству треугольника (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть метрическое пространство X является полным, заданы вещественные числа $\alpha > \beta \geq 0$ и элемент $t_0 \in T$. Пусть существует такое множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, что выполнены условия: при любом $t \in W(t_0)$ справедливо $\inf_{x\in X} d\big(\varphi(x,t), \psi(x,t)\big) < +\infty$; при любых $x \in X$, $t \in W(t_0)$ имеют место включения*

$$(x, \psi(x,t)) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\varphi(\cdot,t), X\big], \quad (x, \varphi(x,t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\psi(\cdot,t), X\big];$$

отображение $\psi(\cdot,t) : X \to Y$ является замкнутым, а отображение $\varphi(\cdot,t) : X \to Y$ — непрерывным. Тогда при любом $t \in W(t_0)$ множество $\mathrm{Coin}(t)$ точек совпадения отображений $\psi(\cdot,t)$ и $\varphi(\cdot,t)$ не пусто и замкнуто в X. Кроме того, многозначное отображение $\mathrm{Coin} : W(t_0) \rightrightarrows X$, при выполнении для семейства функционалов (3.2) условия (C_-), является полунепрерывным снизу в точке t_0, при выполнении условия ($\widehat{\mathrm{C}}_-$) — h-полунепрерывным снизу в точке t_0, а при выполнении условия ($\widehat{\mathrm{C}}_+$) — h-полунепрерывным сверху в точке t_0.

Доказательство. При любом фиксированном $t \in W(t_0)$ для отображений $\psi(\cdot,t)$ и $\varphi(\cdot,t)$ выполнены все условия теоремы 2.1. Согласно этой теореме, при любом $t \in W(t_0)$ множество $\mathrm{Coin}(t)$ не пусто. Докажем замкнутость этого множества. Выберем произвольную последовательность $\{\xi_i\} \subset \mathrm{Coin}(t)$, сходящуюся к некоторому элементу $\xi \in X$. Из непрерывности отображения $\varphi(\cdot,t) : X \to Y$ следует сходимость $\varphi(\xi_i,t) \to \varphi(\xi,t)$. А так как $\varphi(\xi_i,t) = \psi(\xi_i,t)$ $i = 1,2,\ldots$, получаем $\psi(\xi_i,t) \to \varphi(\xi,t)$.

Из этого соотношения вследствие замкнутости отображения $\psi(\cdot,t) : X \to Y$ получаем равенство $\psi(\xi,t) = \varphi(\xi,t)$, т. е. $\xi \in \mathrm{Coin}(t)$. Итак, замкнутость в X множества $\mathrm{Coin}(t)$ доказана.

Пусть выполнено условия (C_-). Докажем, что в этом случае многозначное отображение $\mathrm{Coin} : W(t_0) \rightrightarrows X$ полунепрерывно снизу в точке t_0. Пусть $\xi_0 \in \mathrm{Coin}(t_0)$, т. е. $\varphi(\xi_0,t_0) = \psi(\xi_0,t_0)$. Тогда $\eta_{\xi_0}(t_0) = 0$. В силу условия (C_-) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $\mathcal{W}(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, что при всех $t \in \mathcal{W}(t_0)$ имеет место соотношение

$$\eta_{\xi_0}(t) := d\big(\varphi(\xi_0,t), \psi(\xi_0,t)\big) < (\alpha - \beta)\varepsilon.$$

Согласно теореме 2.1 при любом $t \in W(t_0) \cap \mathcal{W}(t_0)$ существует решение $\xi \in \mathrm{Coin}(t)$ уравнения (3.1) такое, что

$$\rho(\xi,\xi_0) \le \frac{1}{\alpha-\beta} d\big(\varphi(\xi_0,t), \psi(\xi_0,t)\big) < \varepsilon.$$

Таким образом, многозначное отображение Coin полунепрерывно снизу в точке t_0.

Теперь предположим, что выполнено условие $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим такое множество $\mathcal{W}(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, что для любого $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то $\eta_x(t) < \varepsilon(\alpha-\beta)$ при всех $t \in \mathcal{W}(t_0)$. Для любого $t \in W(t) \cap \mathcal{W}(t)$ и для любого $\xi_0 \in \mathrm{Coin}(t_0)$ согласно теореме 2.1 существует $\xi \in \mathrm{Coin}(t)$ такой, что

$$\rho(\xi,\xi_0) \le \frac{1}{\alpha-\beta}\, d\big(\varphi(\xi_0,t), \psi(\xi_0,t)\big) = \frac{1}{\alpha-\beta}\, \eta_{\xi_0}(t) < \varepsilon.$$

Таким образом, $\mathrm{Coin}(t_0) \subset O_X(\mathrm{Coin}(t), \varepsilon)$, т. е. многозначное отображение Coin является h-полунепрерывным снизу в точке t_0.

В заключение предположим, что выполнено условие $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$. Покажем, что в этом случае многозначное отображение $\mathrm{Coin} : W(t_0) \rightrightarrows X$ является h-полунепрерывным сверху в точке t_0. Для любого $\varepsilon > 0$ определим множество $\mathcal{W}(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$ такое, что если для некоторых $x \in X$, $t \in \mathcal{W}(t_0)$ выполнено $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon(\alpha-\beta)$. Тогда для любого $t \in W(t) \cap \mathcal{W}(t)$ и для любого $\xi \in \mathrm{Coin}(t)$ согласно теореме 2.1 существует $\xi_0 \in \mathrm{Coin}(t_0)$ такой, что имеют место соотношения

$$\rho(\xi,\xi_0) \le \frac{1}{\alpha-\beta}\, d\big(\varphi(\xi,t_0), \psi(\xi,t_0)\big) = \frac{1}{\alpha-\beta}\, \eta_{\xi}(t_0) < \varepsilon.$$

Итак, доказано вложение $\mathrm{Coin}(t) \subset O_X(\mathrm{Coin}(t_0), \varepsilon)$, означающее, что многозначное отображение Coin является h-полунепрерывным сверху в точке t_0. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Утверждение теоремы 3.1 остается верным, если предположение замкнутости отображения $\psi(\cdot,t) : X \to Y$ при любом $t \in W(t_0)$ заменить менее обременительным условием его d-замкнутости в совокупности с соотношением

$$\forall \{x_i\} \subset X \;\; \forall x \in X \;\; \big(\, x_i \to x \;\text{ и }\; \varphi(x,t) \in \mathrm{Lim}\, \psi(x_i,t) \,\big) \;\Rightarrow\; \varphi(x,t) = \psi(x,t).$$

Из теоремы 3.1 получим утверждение о зависимости от параметра $t \in T$ множества $\mathrm{Sol}(t)$ решений уравнения

$$\psi(x,t) = y_0(t), \tag{3.3}$$

где $y_0 : T \to Y$. Уравнение (3.3) — это уравнение (3.1) с отображением $\varphi : X \times T \to Y$, постоянным по первому аргументу, т. е. $\varphi(\cdot, t) = y_0(t)$, $t \in T$.

Определим функционал $\eta_x : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ соотношением (3.2), которое для рассматриваемого здесь уравнения принимает вид

$$\eta_x(t) = d\big(y_0(t), \psi(x,t)\big). \tag{3.4}$$

Применяя к уравнению (3.3) теорему 3.1, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть метрическое пространство X является полным, заданы $\alpha > 0$ и $t_0 \in T$. Пусть существует такое множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, что выполнены условия: при любом $t \in W(t_0)$ справедливо $\inf_{x \in X} d\big(y_0(t), \psi(x,t)\big) < +\infty$; при любых $x \in X$, $t \in W(t_0)$ имеет место включение*

$$(x, y_0(t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\psi(\cdot, t), X\big];$$

отображение $\psi(\cdot, t) : X \to Y$ является замкнутым. Тогда при любом $t \in W(t_0)$ множество $\mathrm{Sol}(t)$ решений уравнения (3.3) не пусто и замкнуто в X. Кроме того, многозначное отображение $\mathrm{Sol} : W(t_0) \rightrightarrows X$, при выполнении для семейства функционалов (3.4) условия (C_-), является полунепрерывным снизу в точке t_0, при выполнении условия $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$ — h-полунепрерывным снизу в точке t_0, а при выполнении условия $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ — h-полунепрерывным сверху в точке t_0.

Близкий следствию 3.1 результат был получен в [24].

References

[1] Г. М. Вайникко, “Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений”, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **16**, ВИНИТИ, М., 1979, 5–53; англ. пер.:G. M. Vainikko, “Regular convergence of operators and approximate solution of equations”, *Journal of Soviet Mathematics*, **15**:6 (1981), 675–705.

[2] Z. Artstein, “Continuous dependence of solutions of operator equations. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **231**:1 (1977), 143–166.

[3] Е. С. Жуковский, “Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 33–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, “Continuous dependence on parameters of solutions to Volterra's equations”, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1435–1457.

[4] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “О глобальной разрешимости нелинейных уравнений с параметрами”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **496** (2021), 68–72; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “On global solvability of nonlinear equations with parameters”, *Doklady Mathematics*, **103**:1 (2021), 57–60.

[5] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Глобальная и полулокальная теоремы о неявной и об обратной функции в банаховых пространствах”, *Матем. сб.*, **213**:1 (2022), 3–45; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Global and semilocal theorems on implicit and inverse functions in Banach spaces”, *Sb. Math.*, **213**:1 (2022), 1–41.

[6] А. В. Арутюнов, “Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений”, *Математические заметки*, **86**:2 (2009), 163–169; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Stability of coincidence points and properties of covering mappings”, *Mathematical Notes*, **86** (2009), 153–158.

[7] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the stability of fixed points and coincidence points of mappings in the generalized Kantorovich's theorem”, *Topology and its Applications*, **275** (2020).

[8] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений”, *Уфимский математический журнал*, **12**:4 (2020), 42–55; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations”, *Ufa Math. J.*, **12**:4 (2020), 41–54.

[9] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Метод исследования интегральных уравнений, использующий множество накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций”, *Дифференциальные уравнения*, **58**:1 (2022), 93–104; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “A method for studying integral equations by using a covering set of the Nemytskii operator in spaces of measurable functions”, *Differential Equations*, **58**:1 (2022), 92–103.

[10] L. Narici, E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, **296**, 2nd ed., Taylor & Francis Group, New York, 2011, 628 pp.

[11] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН.*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[12] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “(q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “(q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izv. Math.*, **82**:2 (2018), 245–272.

[13] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f-quasimetric spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **59**:6 (2018), 1063–1072.

[14] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, L. V. Lokoutsievskii, K. V. Storozhuk, “Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics”, *Topology and its Applications*, **221** (2017), 178–194.

[15] З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский, Р. Сенгупта, “О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **24**:125 (2019), 33–38. [Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy, R. Sengupta, “On exact triangle inequalities in (q_1, q_2)-quasimetric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **24**:125 (2019), 33–38 (In Russian)].

[16] В. Мерчела, “К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, “About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].

[17] Т. В. Жуковская, В. Мерчела, А. И. Шиндяпин, “О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:4 (2020), 52–63. [T. V. Zhukovskaia, A. I. Shindiapin, W. Merchela, “On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:4 (2020), 52–63 (In Russian)].

[18] D. Doitchinov, “On completeness in quasi-metric spaces”, *Topology and its Applications*, **30**:2 (1988), 127–148.

[19] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[20] А. В. Арутюнов, “Точки совпадения двух отображений”, *Функц. анализ и его прил.*, **48**:1 (2014), 89–93; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Coincidence points of two maps”, *Funct. Anal. Appl.*, **48**:1 (2014), 72–75.

[21] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 52–63 (In Russian)].

[22] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lectures on Convex and Multivalued Analysis*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].

[23] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, Либроком, М., 2011. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, Librokom Publ., Moscow, 2011 (In Russian)].

[24] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “О непрерывной зависимости от параметра множества решений операторного уравнения”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **54** (2019), 27–37. [E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “On the continuous dependence on the parameter of the set of solutions of the operator equation”, *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 27–37 (In Russian)].

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Мерчела Вассим, кандидат физико-математических наук, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Татьяна Владимировна
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.
Поступила после рецензирования 18.08.2022 г.
Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Wassim Merchela, Candidate of Physics and Mathematics, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Tatiana V. Zhukovskaia
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Received 26.05.2022
Reviewed 18.08.2022
Accepted for press 13.09.2022